1 Równanie stanu

$$s_t = s_{t-1} + \Delta s_t + \varepsilon_t \tag{1}$$

gdzie: s_t – położenie wzdłuż ścieżki w chwili t; Δs_t – odległość przebyta przez robota między chwilami $t-1$ i t; ε_t – zakłócenie losowe (zakłada się, że ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji w_t).

Dla robota z napędem różnicowym zachodzi

$$\Delta s_t = \frac{1}{2}(\Delta s_{r,t} + \Delta s_{l,t}), \tag{2}$$

gdzie: $\Delta_{r,t}$ – droga przebyta przez prawe koło między chwilami $t-1$ i t; $\Delta_{l,t}$ – droga przebyta przez lewe koło między chwilami $t-1$ i t. Drogi kół można obliczyć na podstawie wskazań enkoderów i promieni kół.

Założenie:

$$w_t = \alpha(|\Delta s_{r,t}| + |\Delta s_{l,t}|), \tag{3}$$

gdzie: α – nieznana stała; jej wartość dobierze się metodą prób i błędów.

2 Równanie wyjścia

$$z_t = h(s_t) + \delta(s_t), \tag{4}$$

gdzie:

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$z_{1,t}$ – pomiar z pierwszego czujnika odległościowego w chwili t, $z_{2,t}$ – pomiar z drugiego czujnika odległościowego w chwili t,

$$h(s_t) = \begin{bmatrix} h_1(s_t) \\ h_2(s_t) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$h_1(s_t)$ – średni pomiar z pierwszego czujnika odległościowego, gdy robot jest w położeniu s_t; $h_2(s_t)$ – średni pomiar z drugiego czujnika odległościowego, gdy robot jest w położeniu s_t.

$$\delta(s_t) = \begin{bmatrix} \delta_1(s_t) \\ \delta_2(s_t) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$\delta_1(s_t)$ – zakłócenie pomiaru z pierwszego czujnika odległościowego, gdy robot jest w położeniu s_t; $\delta_2(s_t)$ – zakłócenie pomiaru z drugiego czujnika odległościowego, gdy robot jest w położeniu s_t.

Powyższe średnie otrzymuje się na etapie budowania mapy. Na całej ścieżce należy wybrać od kilku do kilkunastu punktów referencyjnych. Robot przejeżdża ścieżkę kilkukrotnie, a podczas każdego przejazdu rejestruje się wskazania czujników w punktach referencyjnych. Potem te wskazania ze wszystkich przejazdów uśrednia się w każdym punkcie referencyjnym z osobna (w Matlabie służy do tego funkcja `mean`). W ten sposób powstanie tablica wartości, w której jedną kolumną będą położenia robota, a drugą i trzecią – średnie odczyty obu czujników. Gdy podczas pracy filtru Kalmana potrzebna będzie wartość średnia w punkcie, który nie był referencyjny, brakującą wartość średnią oszacuje się poprzez interpolację liniową.

Założenie:

1. $\delta_1(s_t)$ ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji $v_{11}(s_t)$;
2. $\delta_2(s_t)$ ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji $v_{22}(s_t)$.

Powyższe wariancje otrzymuje się na etapie budowania mapy, dla każdego punktu referencyjnego z osobna licząc wariancje pomiarów dla wszystkich przejazdów (w Matlabie służy do tego funkcja `var`). Podobnie jak średnie, obie wariancje się tablicuje (najlepiej użyć tej samej tablicy, co dla średnich, czyli w ten sposób wypełni się jej czwartą i piątą kolumnę).

W algorytmie rozszerzonego filtru Kalmana, obie wariancje posłużą do budowania macierzy kowariancji zakłóceń pomiarowych postaci

$$V(s_t) = \begin{bmatrix} v_{11}(s_t) & 0 \\ 0 & v_{22}(s_t) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

3 Rozszerzony filtr Kalmana

W chwili czasowej t rozszerzony filtr Kalmana dostaje jako dane do przetwarzania następujące wielkości:

$$\hat{s}_{t-1}, \quad \hat{P}_{t-1}, \quad \Delta s_{r,t}, \quad \Delta s_{l,t}, \quad z_t. \tag{9}$$

Dwie pierwsze to odpowiednio ocena położenia robota oraz wariancja tej oceny, obie obliczone dla poprzedniej chwili czasowej, czyli chwili $t-1$. Pozostałe wielkości opisano wcześniej.

Oto poszczególne kroki pracy filtra:

Krok 1. Oblicz

$$\bar{s}_t = \bar{s}_{t-1} + \frac{1}{2}(\Delta s_{r,t} + \Delta s_{l,t}). \tag{10}$$

Krok 2. Oblicz skalar

$$\bar{P}_t = \hat{P}_{t-1} + w_t. \tag{11}$$

Krok 3. Oblicz następującą macierz wzmocnienia filtru o wymiarach 1×2:

$$K_t = \bar{P}_t c_t^\top (c_t \bar{P}_t c_t^\top + V(\bar{s}_t))^{-1}, \tag{12}$$

gdzie:

$$c_t = \begin{bmatrix} h_1'(\bar{s}_t) \\ h_2'(\bar{s}_t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

jest wektorem pochodnych funkcji h_1 oraz h_2. Ponieważ nie znamy wzoru określającego te funkcje, a jedynie mamy ich stablicowane wartości, pochodne należy przybliżyć ilorazami różnicowymi (w Matlabie pomocna tu będzie funkcja `diff`).

Krok 4. Oblicz

$$\hat{s}_t = \bar{s}_t + K_t(z_t - h(\bar{s}_t)). \tag{14}$$

Krok 5. Oblicz

$$\hat{P}_t = (1 - K_t c_t)\bar{P}_t \tag{15}$$

Filtr działa rekurencyjnie, ale trzeba go zainicjalizować. Można to zrobić podając $\hat{s}_0$ jako znaną startową pozycję robota oraz ustawiając $\hat{P}_0 = 0$.