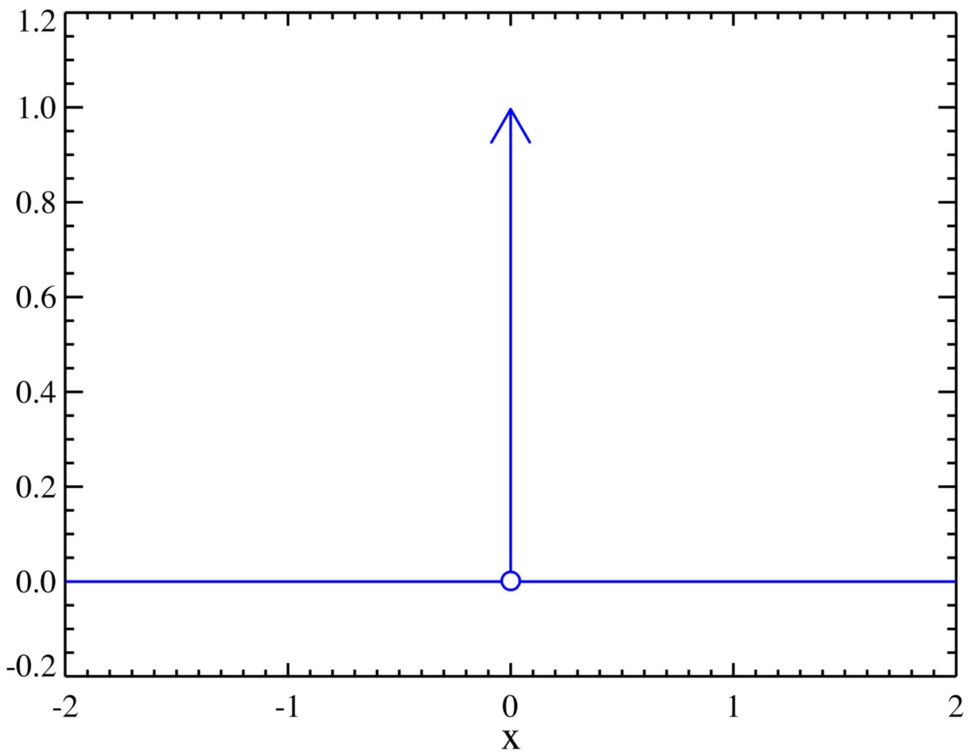

Funkcja Delta-Diraca (przypomnienie)

Delta Diraca – dystrybucja, czyli operator liniowy działający na pewnej przestrzeni funkcyjnej zdefiniowany jako:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx$$

Obiekt ten wprowadził brytyjski fizyk teoretyczny P. A. M. Dirac. Delta Diraca ma wiele ciekawych właściwości; jest przydatnym narzędziem w fizyce kwantowej, elektronice, mechanice i analizie matematycznej, gdzie w szczególności jest ona oryginałem dla transformaty Laplace'a $F(s) = 1$ i pochodną funkcji skokowej Heaviside'a.

Reprezentacje

Delta Diraca (albo **funkcja impulsowa**) δ to, mówiąc intuicyjnie, obiekt matematyczny o następujących własnościach:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

Dodatkowo wartość całki wynosi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

$\delta(x)$ nie jest funkcją o dziedzinie w liczbach rzeczywistych. Matematycznie określamy deltę Diraca jako miarę albo jako dystrybucję, czyli funkcjonał liniowy określony na odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej.

Delta Diraca jest używana do przedstawienia bardzo krótkiego impulsu o jednostkowym polu (np. przenoszącego jednostkowy ładunek elektryczny). W przypadkach tych, delta Diraca jest matematycznym modelem nieskończenie wąskiego impulsu występującego w chwili *t=0*, o nieskończenie dużej amplitudzie i polu równym 1.

Granica funkcji

Deltę Diraca można reprezentować jako granicę funkcji :

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} f(t,h)$$

Przykłady funkcji:

$$f(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{h} & -h/2 < t < h/2 \\ 0 & t \leq -\frac{h}{2} \ \ lub \ \ t \geq h/2 \end{cases}$$

$$f(t,h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-t^2/h^2}$$

$$f(t,h) = \frac{h/\sqrt{\pi}}{t^2 + h^2}$$

W mechanice kwantowej przy warunku ortogonalności funkcji własnych operatora pędu:

$$\psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k-l)x} dx = \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{+h} e^{-i(k-l)x} dx = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin h(k-l)}{(k-l)} = 2\pi\delta(k-l)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_l^*(\vec{r})\psi_k(\vec{r})d\vec{r} = \delta\left(\vec{k} - \vec{l}\right)$$

Z definicji delty Diraca, wynika wiele ważnych własności matematycznych.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)dx = f(a)$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$,
- $\delta(-x) = -\delta(x)$,
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$,
- $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$,